

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

10-дәріс. Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін кері есеп (жұғу шеттік шартымен). Шешімнің жалғыздығы

Дәрістің мақсаты – сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің (жұғу шеттік шартымен) әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығын дәлеледеу

Негізгі сұрақтар:

1. Стокс операторы, Лерэ проекциясы
2. Сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің (жұғу шеттік шартымен) әлсіз шешімінің жалғыздығы
3. Сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің (жұғу шеттік шартымен) әлді шешімінің жалғыздығы

Бұл бөлімдегі қарастырылатын кері есептің 3-дәрістегі кері есептен айырмашылығы сырғанау шеттік шартының орнына жұғу шеттік шартымен қарастырылады.

1 Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(x, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (1.2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (1.4)$$

жұғу шекаралық шартын [1, 2, 3] және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}_n - \partial\Omega$ беті бойынша $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ векторының нормаль компоненті, ал $\mathbf{n} - \partial\Omega$ бетіне түсірген сыртқы бірлік нормаль вектор. Сонымен қатар, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтықтың қысымы болып табылады, ал ν және κ оң коэффициенттері, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы және релаксациясын, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясындағы $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(x)$, $\omega(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.

Енді (1.4) жұғу шекаралық шартына қатысты келесі функционалдық кеңістіктерді енгізейік ([4] қараңыз):

$$\mathbf{H}_n(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_n|_{\partial\Omega} = 0\};$$

$$\mathbf{H}_n^1(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_n|_{\partial\Omega} = 0\};$$

$$\mathbf{H}_n^2(\Omega) \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega) : (\mathbf{curl} \mathbf{v} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}$$

және ықшам түрде жазуға төмендегі жалпылама белгілеулер қолданылады

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \begin{cases} \mathbf{H}_n(\Omega), & (1.4), \text{ шекаралық шарт үшін,} \\ \mathbf{V}^i & := \begin{cases} \mathbf{H}_n^i(\Omega), & (1.4), \text{ шекаралық шарт үшін, } i = 1, 2. \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ал $\mathbf{H}_n^1(\Omega)$ кеңістігінде скалярлық көбейтінді мен норма, сәйкесінше, $(\operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{2,\Omega}$ және $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_n^1(\Omega)} := \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{2,\Omega}$ өрнектерімен анықталады. Сондай-ақ, [1, 4] еңбектерде және оларда келтірілген сілтемелерге сәйкес (мысалы, [5] қараңыз) кез келген $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ функциясы үшін $(\mathbf{H}(\Omega))$ кеңістігі Навье-Стокс теңдеулері теориясынан белгілі) классикалық Ладыженская және Пуанкаре теңсіздіктері келесі түрге ие :

Пуанкаре теңсіздігі

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C_1(\Omega) \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega); \quad (1.7)$$

$$N_1(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} \leq \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq N_2(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n(\Omega); \quad (1.8)$$

$$N_3(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)} \leq \|\Delta \mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \|\mathbf{curl}^2 \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq N_4(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_n^2(\Omega); \quad (1.9)$$

Ладыженская теңсіздіктері [4, 6]

$$\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}^4 \leq 2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2; \quad (1.10)$$

$d = 2$ кезінде, және

$$\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}^4 \leq (4/3)^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^3; \quad (1.11)$$

$d = 3$ кезінде, және

$$\|\mathbf{u}\|_{6,\Omega} \leq (48)^{\frac{1}{6}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad d = 3. \quad (1.12)$$

Енді $-\Delta$ операторымен байланысты $\mathbf{H}^1$ кеңістігінде $\mathbf{a}$ бисызықты және үзіліссіз формасын енгізейік:

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \begin{cases} (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega}, & \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathbf{n}}^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.4) \text{ шарт үшін} \quad (1.13)$$

Соболев кеңістіктері теориясынан $\mathbf{H}^1(\Omega)$ және $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің нормалары эквивалентті екені анық, яғни $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$. Сондай-ақ, Фридрихс теңсіздігі мен (1.8) өрнегінен $\mathbf{H}_{\mathbf{n}}^1(\Omega)$ және $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің, сәйкесінше, $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{n}}^1(\Omega)} = \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ және $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ нормалары эквивалентті аңғаруға болады.

Осылайша, $\mathbf{a}$ бисызықты формасы $\mathbf{H}^1(\Omega)$ кеңістігінен $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ кеңістігіне әсер ететін A изоморфизмін анықтайды,

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (1.14)$$

мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — $\mathbf{H}^1(\Omega)$ және $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы. Сонымен қатар, келесі үзіліссіз енгізулер орынды

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \quad (1.15)$$

мұндағы алғашқы екі кеңістіктің әрқайсысы келесіде тығыз.

Демек, (1.9) өрнектен $\mathbf{H}_{\mathbf{n}}^2(\Omega)$ және $\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)$ кеңістіктерінің, сәйкесінше, $\|\Delta \mathbf{u}\|_{2,\Omega} = \|\mathbf{curl}^2 \mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ және $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)}$ нормалары эквиваленттілігі тұжырымдалады.

Сондай-ақ, (1.4) жұғу шекаралық шартынан $d = 3$ және $d = 2$ жағдайда, сәйкесінше,

$$\begin{aligned} (-\Delta \mathbf{v}, \mathbf{u})_{2,\Omega} &= -(\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \mathbf{u})_{2,\Omega} + (\mathbf{curl}^2 \mathbf{v}, \mathbf{u})_{2,\Omega} = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n \, dS + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{2,\Omega} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{curl} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) \, dS + \\ &= (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega} = (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.16)$$

және

$$\begin{aligned} (-\Delta \mathbf{v}, \mathbf{u})_{2,\Omega} &= (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{2,\Omega} + (\overline{\mathbf{curl}}(\mathbf{curl} \mathbf{v}), \mathbf{u})_{2,\Omega} = \\ &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{curl} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, dS + (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega} = (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Грин формулалары ([1, 4] қараңыз) орынды, мұндағы $\overline{\text{curl}} \varphi - \varphi$ функциясы үшін $(\varphi_{x_2}, -\varphi_{x_1})_{2,\Omega}$ өрнекпен анықталған вектор.

Анықтама 1.1. (1.1)-(1.5) кері есебі жалпылама әлді шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^2(\Omega))$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. Әрбір теңдеуді сәйкес функционалдық кластарда жалпылама функция мағынасында қанағаттандыратын

$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Ескерту 1.1. Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [7] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (1.2) теңдеуден жалғыз түрде қалпына келтіруге болады.

2 Кері есепті қайта тұжырымдау: эквивалентті локалды емес тура есеп

Кері есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^1(\Omega); \quad (2.1)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \omega)_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (2.3)$$

$$\omega(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^1(\Omega), \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{u}_0, \omega)_{2,\Omega} = e(0); \quad (2.5)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (2.6)$$

Енді (1.1) теңдеуді $\omega(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (2.2) шартты қолданғанда, онда $f(t)$ функциясы табылады

$$f(t) = \frac{1}{g_0(t)} (e'(t) + \kappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) ds). \quad (2.7)$$

Демек, (2.7) өрнекті (1.1) теңдеуге қойғанда, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \\ F(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (2.8)$$

теңдеулер жүйесін, (1.3) бастапқы шартты және (1.4) шекаралық шартты қанағаттандыратын локалды емес тура есеп тұжырымдалады, мұндағы $F(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (2.7) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің алып келдік.

Кері есептер мен локалды емес тура есептердің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 2.1. Айталық, (2.2)-(2.5) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің эквивалентті, яғни (1.1)-(1.5) кері есебінің $(\mathbf{u}, p, f)$ шешімінің $(\mathbf{u}, p)$ жұбы (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің $(\mathbf{u}, p)$ шешімі (2.7) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі болып табылады.

Ескерту 2.1. (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің әлді шешімінің анықтамасы 1.1-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.

Дәлелдеуі 2.1. Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінен (2.8) теңдеуді алуда дәлелденді.

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (2.7) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса, $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебі шешімі екенін дәлелдеу үшін (1.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.

Онда кері жорып, яғни (1.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық. Сондай-ақ,

$$(\mathbf{u}(t), \omega)_{2, \Omega} = e_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

болсын, мұндағы $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (2.4), (2.9) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0, T])$ орындалады, сонымен қатар (2.5) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \omega)_{2, \Omega} = e(0).$$

Енді (2.8) өрнекке ω функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, сонымен бірге

(2.9) шартты ескерсек, онда

$$e_1'(t) + \varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) ds = \frac{1}{g_0(t)} \times$$

$$\left(e'(t) + \varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) ds \right) (\mathbf{g}, \omega)_{2, \Omega} \quad (2.10)$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (2.2) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

және одан $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.

3 Кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің бар болуы

Бұл бөлімде 2.1-лемма бойынша (1.1)-(1.5) кері есебінің орнына (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 3.1. Айталық, (2.1)-(2.6) шарттар орындалсын және m оң саны табылып келесі шартты қанағаттандырсын

$$\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \leq m < 2. \quad (3.1)$$

Олай болса, ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні 8-дәрісте анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad (3.2)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Ескерту 3.1. 3.1-теоремадағы (3.1) шарт (1.5) қосымша шартқа қатысты априорлық бағалаулар алу кезінде пайда болды. Егер (1.5) қосымша шарт үшін (1.1) теңдеудің оң жағын арнайы түрде $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{x})$ деп таңдағанда (3.1) шарттан құтылуға болады.

4 Кері есептің әлді шешімінің бар болуы

Теорема 4.1. Айталық, 3.1-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шартты орынды болсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^2(\Omega). \quad (4.1)$$

Олай болса, (2.8), (1.3), (1.4) локалды емес тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір жалпылама $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))$ әлді шешімі бар болады. Сонымен қатар, (1.1)-(1.5) кері есебінің де кемінде бір жалпылама әлді шешімі бар болады және келесі априорлық бағалауларды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{V}^1 \cap \mathbf{V}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V}^1 \cap \mathbf{V}^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (4.2)$$

мұндағы T_1 мәні 8-дәрістен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

5 Жалпылама әлсіз және әлді шешімнің жалғыздығы

Теорема 5.1. Айталық, 3.1-теореманың шарттары орындалсын. (1.1)-(1.4), (2.7) есебінің бірдей белгілілері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз және әлді шешімдері болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (1.1)-(1.4), (2.7) есебінің әлсіз және әлді шешімдері жалғыз, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұнда T^* — әлсіз және әлді шешімдердің бар болуының максималды уақыты.

Дәлелдеуі 5.1. $\mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_1$ үшін (2.8) теңдеуді жазып және оларды бір-бірін азайтып, шыққан нәтижені сәйкесінше $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_t$ функцияларына $\mathbf{L}_2(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейткенде, келесі өрнектер алынады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u})_{2, \Omega} - \\ & \int_0^t K(t - \tau) \mathbf{a}(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau + \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega)_{2, \Omega} + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + \right. \\ & \left. ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}_1)_{2, \Omega} + ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}) + \right. \\ & \left. \int_0^t K(t - \tau) \mathbf{a}(\mathbf{u}(\tau), \omega) d\tau \right] (\mathbf{g}, \mathbf{u})_{2, \Omega}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega} - \\
& ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}^n(s), \mathbf{u}_t^n(t)) ds + \frac{1}{g_0(t)} [\varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \\
& \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}_1) + ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}) + \\
& \int_0^t K(t-\tau) \mathbf{a}(\mathbf{u}(\tau), \omega) d\tau] (\mathbf{g}, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Соңғы алынған теңдіктерді қоссақ, онда төмендегі нәтиже шығады

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\
& \varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega} + \\
& ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(s)) ds + \\
& \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega)_{2,\Omega} + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}_1)_{2,\Omega} + \right. \\
& \left. ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}) + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \omega) ds \right] (\mathbf{g}, \mathbf{u})_{2,\Omega} + \\
& \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}^n(s), \mathbf{u}_t^n(t)) ds - \frac{1}{g_0(t)} [\varkappa \mathbf{a}(\mathbf{u}_t, \omega) + \\
& \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \omega) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}_1) + ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}) + \\
& \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \omega) ds] (\mathbf{g}, \mathbf{u}_t)_{2,\Omega} = \sum_{i=1}^7 R_i.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерінің көмегімен (5.1) өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$\begin{aligned}
|R_1| &= \left| -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u})_{2,\Omega} \right| \leq \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}^2 \leq \\
& C(\Omega) \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leq \|\mathbf{u}\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_t\|_{4,\Omega} \leq \\
& \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leq \|\mathbf{u}_2\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_t\|_{4,\Omega} \leq \\
& \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$|R_4| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (5.7)$$

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 ds,$$

$$|R_5| \leq \frac{\|\mathbf{g}\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}}{k_0} \left[\varkappa \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \right. \\ \left. \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \right. \\ \left. \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(\tau)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{\|\mathbf{g}\|_{2,\Omega}^2}{2k_0^2} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + \quad (5.8)$$

$$\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2}{2} \left[\nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \right. \\ \left. K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 d\tau \right] + \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0 k_0^2} \|\mathbf{g}\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2$$

$$|R_6| \leq \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (5.9)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 ds,$$

$$|R_7| \leq \frac{\|\mathbf{g}\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}_t\|_{2,\Omega}}{k_0} \left[\varkappa \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \right. \\ \left. \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} + \right. \\ \left. \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(\tau)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\mathbf{g}\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2}. \quad (5.10)$$

$$\left[\nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \right. \\ \left. K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 d\tau \right] + \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\mathbf{g}\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2$$

Алынған (5.4)-(5.10) бағалауларды (5.3) өрнекке қойғанда, келесі дифференциалдық теңсіздік алынады

$$\frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + \\ \beta \|\mathbf{u}_t\|_{2,\Omega}^2 \leq a_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 + a_2 \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 ds + a_3 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2, \quad (5.11)$$

мұндағы $\alpha := 2 \left(\varkappa - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right)$, $\beta := 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right)$;

$$a_1 := 2C \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1\|_{2,\Omega} + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_2\|_{2,\Omega} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} + \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right) \times \\
& \left(\nu^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1\|_{2, \Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_2\|_{2, \Omega}^2 \right); \\
a_2 &:= \frac{K_0^2}{\nu} + \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 K_0^2 + \frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} K_0^2 + \frac{4K_0^2}{\varepsilon_0}; \\
a_3 &:= \frac{1}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}\|_{2, \Omega}^2 \left(1 + \frac{4\kappa^2}{\varepsilon_0} \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Енді $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, функциялары және әлсіз шешім үшін алынған бағалауларда $\frac{\kappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \leq m < 2$ шарты кезіндегі $\varepsilon_i, i = 0, 1$ сәйкес мәнінде $\alpha, \beta, a_1, a_2, a_3$ коэффициенттері оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (5.11) өрнекті τ бойынша 0-ден $t \in [0, T^*]$ -ға шейін интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылады

$$y(t) \leq a \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad (5.12)$$

мұндағы $y(t) := \|\mathbf{u}\|_{2, \Omega}^2 + (\kappa + \nu) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2$, $a := \max \left\{ \frac{1}{\kappa + \nu} (a_1 + T a_2), a_3 \right\}$. 5.1-Теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (5.12) өрнектен $t \in [0, T^*]$ үшін $y(t) \equiv 0$ тұжырымдалады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$.

Список литературы

- [1] A.A. Kotsiolis, A.P. Oskolkov, The initial boundary value problem with a free surface condition for the ε -approximations of the Navier–Stokes equations and some of their regularizations, 80(3) (1996) 1773–1801. 1, 1, 1
- [2] A.P. Oskolkov, Initial boundary-value problems with a free surface condition for the modified Navier–Stokes equations, J. Math. Sci. 84 (1997) 873–887. 1
- [3] A.P. Oskolkov, Nonlocal problems for the equations of Kelvin–Voight fluids and their ε -approximations in classes of smooth functions, Journal of Mathematical Sciences, 91(2) (1998), 2840–2859. 1
- [4] O.A. Ladyzhenskaya, On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897. 1, 1, 1, 1
- [5] J.M. Ghidaglia, Regularite des solutions des certain problemes aux limites lineaires lies aux equations d’Euler, Comm. Part. Diff. Equations. 9 (1984) 1265–1298. 1

- [6] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970. [1](#)
- [7] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity, 34 (2021), pp. 3083–3111. [1.1](#)